ΛΥΣΕΙΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2006

ΘΕΜΑ 1ο

α)

Έχουμε ότι CV = 20 % και S = 4.

Όμως $CV = \frac{S}{\bar{x}} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{4}{\bar{x}} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{4}{0,2} \Leftrightarrow \bar{x} = 20$

β)

$$\bar{x} = \frac{16+14+22+18+20+\alpha}{5} \Leftrightarrow 20 = \frac{90+\alpha}{5}$$

$$90 + \alpha = 100$$

$$\alpha = 10$$

γ)

Για α = 10, οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι 14, 16, 18, 22, 30

Η διάμεσος δ είναι η $3^η$ παρατήρηση, άρα δ = 18

δ)

Αφού CV = 20 % > 10% το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ 2ο

α)

Παράγουσα της f είναι η συνάρτηση

$F(x) = x^4 - 6x^2 + 2006x + c$, όπου c πραγματική σταθερά

β)

$f'(x) = 12x^2 - 12$

γ)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$

Πρόσημο της f ′ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f′		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η συνάρτηση f

είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$

και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$

ΘΕΜΑ 3ο

α)

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2}\cdot\alpha = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\cdot\alpha = \alpha\lim_{x\to 2^+}(x+2) = 4\alpha$$

β)

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(\alpha x+\beta) = 2\alpha+\beta$$

γ)

Θα πρέπει να ισχύει $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow$

$4\alpha = 2\alpha + \beta = 4$

$4\alpha = 4$ και $2\alpha + \beta = 4$

$\alpha = 1$ και $\beta = 2$

δ)

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{αν } x > 2 \\ 4, & \text{αν } x = 2 \\ x+2, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$

Οπότε $f(0) = 0 + 2 = 2$ και $f(3) = \dfrac{3^2-4}{3-2} = 5$

ΘΕΜΑ 4ο

Αν υ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση x, έχουμε ότι

$\upsilon + x = 50 \Leftrightarrow \upsilon = 50 - x$, $0 < x < 50$

α)

Το εμβαδόν του τριγωνικού πλακιδίου είναι ίσο με

$E = \dfrac{1}{2}\beta\cdot\upsilon \Leftrightarrow E(x) = \dfrac{1}{2}x(50-x)$, $0 < x < 50$

β)

$E(x) = 25x - \dfrac{1}{2}x^2$, $0 < x < 50$ με $E\,'(x) = 25 - x$

$E\,'(x) = 0 \Leftrightarrow 25 - x = 0 \Leftrightarrow x = 25$

$E\,'(x) > 0 \Leftrightarrow 25 - x > 0 \Leftrightarrow x < 25$

$E\,'(x) < 0 \Leftrightarrow 25 - x < 0 \Leftrightarrow x > 25$

Άρα η συνάρτηση Ε παρουσιάζει μέγιστο για $x = 25$

γ)

Η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με $E(25) = \dfrac{1}{2}\cdot 25\cdot(50-25) = 312{,}5\ cm^2$.